ریاضیات کاربردی و عددی

بخش اول: معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره ای و مدل سازی

مولف: دکتر بهزاد خداکرمی

کانون ارشد دکتر خداکرمی

www.kanoonarshad.com

فصل 1 مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل معمولی

1- 1- تعاریف

معادله دیفرانسیل: هر معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد را معادله دیفرانسیل نامند. هرگاه یک متغیر مستقل داشته باشیم معادله دیفرانسیل را معمولی (عادی) و اگر دو یا چند متغیر مستقل داشته باشیم معادله دیفرانسیل را با مشتقات جزئی (پاره‌ای) می‌نامیم.

مرتبه: بزرگ‌ترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌نامیم. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به‌صورت زیر است:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

درجه: توان مشتق با بالاترین مرتبه را درجه معادله دیفرانسیل می‌نامیم.

معادله خطی و غیرخطی: هر معادله دیفرانسیل معمولی اگر به صورت

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

باشد آن را یک معادله دیفرانسیل خطی می‌نامیم.

☼ **نکته**: اگر در معادله دیفرانسیلی توان‌های متغیر وابسته و مشتقاتش یا توابع غیرجبری برحسب متغیر وابسته یا مشتقاتش ظاهر شود آن معادله دیفرانسیل، غیرخطی است.

$f(x) = 0 \Rightarrow$ معادله همگن است

$f(x) \neq 0 \Rightarrow$ معادله ناهمگن است

☼ **نکته**: هر معادله دیفرانسیل خطی از درجه یک است.

جواب معادله: هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند، جواب معادله نامیده می‌شود.

جواب عمومی: جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل، جوابی است که شامل یک یا چند ثابت دلخواه بوده و اگر هر مقدار دلخواهی را به این ثابت‌ها نسبت دهیم، آن جواب در معادله موردنظر صدق نماید.

☼ **نکته**: جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه n ام شامل n ثابت دلخواه است.

شرایط اولیه: اگر تمام مقادیر تابع و مشتقات آن در یک نقطه خاص از متغیر مستقل بیان شده باشند، مسئله را با شرایط اولیه گوییم.

جواب خصوصی: اگر جواب عمومی را تحت شرایط اولیه یا مرزی مسئله قرار دهیم و مقدار ثابت‌ها را تعیین کنیم، جواب خاص معادله به‌دست می‌آید.

جواب غیرعادی: جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل تابعی است که بر تمام منحنی‌های مربوط به جواب عمومی مماس می‌باشد. جواب غیرعادی را پوش منحنی نیز گویند.

☼ **نکته**: معادلات خطی جواب غیر عادی ندارند و هر معادله غیرخطی نیز الزاماً جواب غیرعادی ندارد.

1 - 2 - تشکیل معادله دیفرانسیل

دسته منحنی چندپارامتری: یک دسته‌ی منحنی یک پارامتری، معادله‌ای به صورت $f(x,y,c)=0$ است که در آن c یک ثابت دلخواه است و با مقدار دادن به آن، منحنی‌ها حاصل می‌شود.

در حالت کلی یک دسته منحنی n پارامتری دارای شکلی به صورت زیر است.

$$f(x,y,c_1,c_2,...,c_n)=0$$

طرز تشکیل معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌ها: جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل مرتبه n به صورت یک دسته منحنی n پارامتری است. حال با داشتن یک دسته منحنی n پارامتری می‌خواهیم یک معادله دیفرانسیل بدست آوریم که جواب عمومی آن دسته منحنی مذکور باشد. برای این کار به تعداد ثابت‌های دلخواه به طور متوالی از معادله دسته منحنی نسبت به x مشتق می گیریم و ثابتها را بین معادله دسته منحنی و مشتقات آن حذف می کنیم تا معادله دیفرانسیل مربوطه حاصل شود.

☼ **نکته**:: اگر معادله دسته منحنی‌ها به صورت

$$y = c_1y(x) + c_2y_2(x) + \mathbf{L} + c_n y_n(x)$$

باشد از بسط دترمینان زیر می توان معادله دیفرانسیل دسته منحنی را تعیین نمود:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \mathbf{L} & \mathbf{L} & y_n(x) & y \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \mathbf{L} & y_n'(x) & y' \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \mathbf{L} & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

1-3 - تعیین مسیرهای متعامد

الف) مختصات دکارتی $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد $\Rightarrow \frac{dy}{dx} \to -\frac{dx}{dy}$

ب) مختصات قطبی

معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد $\Rightarrow \frac{rdq}{dr} \to -\frac{dr}{rdq}$

از حل معادله دیفرانسیل فوق معادله مسیرهای متعامد بر دسته منحنی مفروض بدست می‌آید.

1-4- پوش

پوش یک خانواده منحنی‌های $f(x,y,c)=0$ منحنی مانند $y=f(x)$ است که بر همه اعضای خانواده منحنی‌های $f(x,y,c)=0$ در یک نقطه مماس است.

برای تعیین پوش دسته منحنی‌های $f(x,y,c)=0$ c را بین دستگاه‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial c}(x,y,c)=0$, $f(x,y,c)=0$ حذف می کنیم تا به پوش $y=f(x)$ برسیم.

☼ **نکته**: پوش یک جواب منفرد است.

فصل 2

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

2-1- مقدمه

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را می توان به یکی از صورت‌های زیر نشان داد:

(1) $f(x,y,y')=0$

(2) $y'=f(x,y)$

(3) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

2-2- حل معادلات جداشدنی

هرگاه بتوان یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را به صورت $f(y)dy=g(x)dx$ نوشت آن را معادله دیفرانسیل جداشدنی می نامیم. برای حل چنین معادلاتی از طرفین معادله انتگرال می گیریم تا جواب عمومی حاصل شود

☼ **نکته**: **اگر** معادله به شکل $y'=f(ax+by+c)$ باشد با تغییر متغیر $u=ax+by+c$ به یک معادله جداشدنی تبدیل می‌شود.

☼ **نکته**: هر معادله به شکل $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ با تغییر متغیر $z=xy$ به یک معادله تفکیک‌پذیر تبدیل می‌شود.

2-3- حل معادلات همگن

تابع همگن: تابع دو متغیره $f(x,y)$ را همگن از درجه‌ی n می‌نامیم هرگاه به ازای $t>0$ که $(tx,ty),(x,y)\in D_f$، داشته باشیم:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول را همگن نامیم هرگاه به یکی از دو حالت زیر باشد:

حالت اول: معادله به صورت $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ باشد که توابع M و N همگن از درجه یکسان باشند.

حالت دوم: معادله به صورت $y'=f(x,y)$ باشدکه $f(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد.

در این‌صورت می‌توان معادله همگن $y'=f(x,y)$ به‌صورت زیر بیان کرد:

$$y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

برای حل معادلات دیفرانسیل همگن از تغییر متغیر $u=\frac{y}{x}$ استفاده می کنیم.

$$y=vx \quad \Rightarrow \quad y'=xv'+v$$

☼ **نکته**: معادله دیفرانسیل $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ را در نظر بگیرید.

الف) $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$: دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ متقاطع هستند.

اگر نقطه (a,b) محل تلاقی آن‌ها باشد آن‌گاه با تغییر متغیر $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$ معادله به یک معادله همگن $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$ تبدیل می‌شود.

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$: دو خط موازی هستند و با تغییر متغیر $u = ax+by$ معادله به یک معادله جداشدنی تبدیل می‌شود.

2-4- حل معادلات کامل

اگر توابع M و N و $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ توابعی پیوسته از x و y باشند آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ کامل باشد آن است که: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

روش اول:

باید تابعی مانند $f(x,y)=c$ را پیدا کنیم که $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow f(x,y) = \int M dx + g(y) \qquad (3) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) + g'(y) \quad (4)$

$(2),(4) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right) + g'(y) = N \Rightarrow g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M dx\right)$

با انتگرال‌گیری از معادله فوق $g(y)$ و با جایگذاری در رابطه (3)، $f(x,y)$ تعیین می شود

روش دوم: **روش تستی**

1) تمام جملات شامل y را در $M(x,y)$ حذف و از جملات باقیمانده آن نسبت به x انتگرال می گیریم.
2) از تمام جملات $N(x,y)$ نسبت به y انتگرال می گیریم.
3) حاصل جمع انتگرال‌های مراحل قبل را برابر c قرار داده و همین جواب معادله خواهد بود.

☼ **نکته**: هر معادله دیفرانسیل جداشدنی کامل است.

2 - 5- عامل انتگرال‌ساز

فرض کنید معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ کامل نباشد. هرگاه تابعی مانند $\mu(x,y) \neq 0$ موجود باشد به طوری که با ضرب کردن معادله در تابع μ یعنی $(\mu M)(x,y)dx+(\mu N)(x,y)dy=0$ کامل شود در این صورت μ را عامل انتگرال‌ساز یا فاکتور انتگرال معادله گویند.

حالت های خاص:

1) $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$ آن‌گاه m تابعی از x است و $m(x)=e^{\int f(x)dx}$

2) $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=g(y)$ $\Rightarrow$ $m(y)=e^{-\int g(y)dy}$

3) $\frac{1}{yN-xM}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(xy)$ $\Rightarrow$ $m=e^{\int f(z)dz},\ z=xy$

4) $\frac{y^2}{xM+yN}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(\frac{x}{y})$ $\Rightarrow$ $m=e^{\int f(z)dz},\ z=\frac{x}{y}$

5) $\frac{x^2}{xM+yN}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(\frac{y}{x})$ $\Rightarrow$ $m=e^{-\int f(z)dz},\ z=\frac{y}{x}$

6) $\frac{1}{N-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x+y)$ $\Rightarrow$ $m=e^{\int f(z)dz},\ z=x+y$

7) $\frac{1}{2(xN-yM)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x^2+y^2)$ $\Rightarrow$ $m=e^{\int f(z)dz},\ z=x^2+y^2$

☼ **نکته**: اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را بتوان به شکل

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$$

نوشت و $f(xy)\neq g(xy)$ آن‌گاه معادله یک عامل انتگرال‌ساز به صورت زیر دارد:

$$m(x,y)=\frac{1}{xM-yN}=\frac{1}{xy\left(f(xy)-g(xy)\right)}$$

☼ **نکته**: اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ همگن باشد آن‌گاه دارای یک عامل انتگرال‌ساز به صورت زیر دارد:

$$m(x,y)=\frac{1}{xM+yN}\quad,\quad xM+yN\neq 0$$

☼ **نکته**: هر معادله دیفرانسیل به صورت

$$x^m y^n(aydx+bxdy)+x^k y^s(aydx+bxdy)=0$$

که $ab-ab\neq 0$ است دارای عامل انتگرال‌سازی به صورت $m=x^p y^q$ است که برای تعیین p و q باید m را در معادله ضرب کرده و از شرط کامل بودن استفاده کنیم.

☼ **نکته**: اگر معادله دیفرانسیل جواب داشته باشد آن‌گاه بی‌نهایت عامل انتگرال‌ساز دارد.

☼ **نکته**: هر معادله دیفرانسیل خطی $a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$ دارای عامل انتگرال‌ساز $m(x)=\frac{1}{a_1(x)}\int\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx$ است.

2-6- حل معادله به کمک دیفرانسیل کامل

از روابط دیفرانسیلی زیر می توان در حل برخی از معادلات دیفرانسیل استفاده کرد:

1) $xdy + ydx = d(xy)$

2) $\frac{xdy - ydx}{xy} = d\left(\ln \frac{y}{x}\right)$

3) $\frac{xdy + ydx}{xy} = d(\ln xy)$

4) $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

5) $\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$

6) $\frac{2xdx + 2ydy}{x^2 + y^2} = d\left(\ln(x^2 + y^2)\right)$

2-7- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$y' + p(x)y = q(x)$

جواب عمومی: $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + c\right)$

اگر معادله دیفرانسیل به صورت $x' + p(y)x = q(y)$ باشد داریم:

جواب عمومی: $x = e^{-\int p(y)dy}\left(\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy + c\right)$

☼ **نکته**: اگر $y_1(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $y' + p(x)y = q(x)$ باشد آن‌گاه جواب عمومی آن عبارت است از:

$y = y_1(x) + ce^{-\int p(x)dx}$

☼ **نکته**: شکل کلی یک معادله دیفرانسیل خطی به‌صورت زیر است:

$f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x)$

که با تغییر متغیر $u = f(y)$ به معادله مرتبه اول خطی شکل (1) تبدیل خواهد شد:

$u' + p(x)u = q(x)$

2-8- معادلات برنولی

$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad , \quad n \neq 0,1$

معادله فوق معادله‌ی برنولی از درجه n است

برای حل این معادله از تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ استفاده می کنیم و آنرا به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می کنیم:

$$u' + (1-n)p(x)u = q(x)$$

2-9- معادلات ریکاتی

$$y' + p(x)y = q(x) + r(x)y^2$$

هرگاه $y = y_1(x)$ یک جواب برای معادله بالا باشد، با تغییر متغیر

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل می‌شود.

☼ **نکته**: اگر در معادله ریکاتی از تغییر متغیر $y = y_1 + u$ استفاده کنیم آن‌گاه معادله به یک معادله برنولی تبدیل می‌شود

2-10- معادلات لاگرانژ

شکل کلی یک معادله لاگرانژ به‌صورت زیر است:

$$y = xf(y') + g(y')$$

که با فرض $y' = p$ و با مشتق‌گیری نسبت به x از طرفین معادله بالا با توجه به روند زیر به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل می‌شود:

$$y' = f(p) + [xf'(p) + g'(p)]\frac{dp}{dx},$$

$$p - f(p) = [xf'(p) + g'(p)]\frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

2-11- معادله کلرو

$$y = xy' + f(y')$$

جواب عمومی: $y = cx + f(c)$

جواب منفرد: از حذف c در دستگاه $\begin{cases} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{cases}$ تعیین می گردد.

2-12- معادلات مرتبه اولی که نسبت به مشتق حل نمی‌شوند.

2-12-1- معادلات فاقد x

این نوع معادلات به شکل $f(y,y')=0$ هستند:

الف) $y'=g(y)$: در این حالت معادله جدایی‌پذیر است

ب) $y=g(y')$: در این حالت با فرض $y'=p$ داریم:

$$y=g(p) \Rightarrow dy=g'(p)dp \Rightarrow pdx=g'(p)dp \quad (\frac{dy}{dx}=p)$$

$$\Rightarrow dx=\frac{g'(p)}{p}dp \Rightarrow x=\int \frac{g'(p)}{p}dp$$

از حل دستگاه زیر جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} y=g(p) \\ x=\int \frac{g'(p)}{p}dp \end{cases}$$

ج) اگر نتوان y و y' را برحسب هم بیان نمود:

$$y=a(t) \ , \ y'=b(t)$$

$$dy=a'(t)dt \ , \ \frac{dy}{dx}=b(t)$$

$$\Rightarrow b(t)dx=a'(t)dt \Rightarrow dx=\frac{a'(t)}{b(t)}dt \Rightarrow x=\int \frac{a'(t)}{b(t)}dt+c$$

از حل دستگاه زیر جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} y=a(t) \\ x=\int \frac{a'(t)}{b(t)}dt+c \end{cases}$$

2-12-2- معادلات فاقد y

این نوع معادلات به شکل $f(x,y')=0$ هستند:

الف) $y'=g(x)$: در این حالت معادله جدایی‌پذیر است.

ب) $x = g(y')$: در این‌حالت با فرض $y' = p$ داریم:

$$x = g(p) \Rightarrow dx = g'(p)dp \Rightarrow \frac{dy}{p} = g'(p)dp \qquad (\frac{dy}{dx} = p)$$

$$\Rightarrow dy = pg'(p)dp \Rightarrow y = \int pg'(p)dp + c$$

از حل دستگاه زیر جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} x = g(p) \\ y = \int pg'(p)dp + c \end{cases}$$

حالت سوم: اگر نتوان x و y' را برحسب هم بیان نمود:

$$x = a(t) \ , \ y' = b(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = b(t) \ , \ dx = \frac{dy}{b(t)} \Rightarrow \frac{dy}{b(t)} = a'(t)dt \Rightarrow dy = b(t)a'(t)dt$$

$$\Rightarrow y = \int b(t)a'(t)dt + c$$

از حل دستگاه زیر جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = \int b(t)a'(t)dt + c \end{cases}$$

2-12-3- معادلات فاقد متغیر x و y

هرگاه این نوع معادلات که به شکل $f(y') = 0$ هستند دارای حداقل یک ریشه $y' = k$ باشند:

جواب عمومی : $f(\frac{y - c}{x}) = 0$

2-12-4- معادلات به شکل $y = f(x, y')$

در این حالت با فرض $y' = p$ داریم:

$$y = f(x, p)$$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

از حذف p در دستگاه معادلات زیر، جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} y = f(x,p) \\ p = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\dfrac{dp}{dx} \end{cases}$$

اگر نتوان p را از دستگاه بالا حذف کرد، جواب به صورت پارامتری بالا بیان می‌شود.

2-12-5- معادلات به شکل $x = f(y, y')$

در این حالت با فرض $y' = p$ داریم:

$$x = f(y,p)$$

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{dp}{dy} \quad , \quad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}\right)$$

از حذف p در دستگاه معادلات زیر، جواب عمومی بدست می آید:

$$\begin{cases} x = f(y,p) \\ \dfrac{1}{p} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\dfrac{dp}{dy} \end{cases}$$

اگر نتوان p را از دستگاه بالا حذف کرد، جواب به صورت پارامتری بالا بیان می‌شود.

2-13- معادلات دیفرانسیل مرتبه اول از درجه n

معادله مرتبه اول ودرجه n زیر را در نظر می گیریم:

$$a_n(x,y)(y')^n + a_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + a_0(x,y) = 0$$

اگر بتوان معادله فوق را به صورت $(y' - g_1(x,y))(y' - g_2(x,y)) \cdots (y' - g_n(x,y)) = 0$

تجزیه نمود $F_i(x,y,c) = 0$ ها جواب هریک از معادلات دیفرانسیل $y' = g_i(x,y)$ و $1 \le i \le n$ خواهد بود در این صورت جواب معادله فوق عبارت است از:

$$F_1(x,y,c)F_2(x,y,c)\cdots F_n(x,y,c) = 0$$

فصل 3

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

3-1- معادله مرتبه دوم خطی

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به صورت زیر نشان داده می شود:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$f(x) = 0$ Þ معادله همگن

$f(x) = 0$ Þ معادله ناهمگن

برای یک معادله همگن داریم:

1- هرگاه y_1 یک جواب معادله باشد، در این‌صورت c_1y_1 نیز یک جواب برای این معادله است.

2- هرگاه y_1 و y_2 جواب‌های معدله باشند، در این‌صورت ترکیب خطی این جواب‌ها یعنی $c_1y_1 + c_2y_2$ نیز یک جواب برای این معادله است.

3- اگر y_1 و y_2 در جواب مستقل خطی باشند یعنی y_1 ضریبی از y_2 نباشد، در این‌صورت $c_1y_1 + c_2y_2$ یک جواب عمومی معادله خواهد بود و با y_c یا y_h نشان می‌دهیم.

☼ **نکته**: دو تابع y_1 و y_2 که $y_2 \neq 0$، مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر $\frac{y_1}{y_2}$ ثابت نباشد.

رونسکین توابع $(n-1)$ بار مشتق‌پذیر، $y_1, y_2, \ldots, y_n$ عبارت است از:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

فرض می کنیم توابع $y_1, y_2, \ldots, y_n$ بر بازه I، $(n-1)$ بار مشتق‌پذیر باشند:

الف) اگر W در هیچ نقطه‌ای از I صفر نشود آن‌گاه این توابع مستقل خطی هستند.

ب) اگر این توابع بر I وابسته خطی باشند، آن‌گاه W در هر نقطه از I برابر صفر است.

☼ **نکته**: ممکن است رونسکین توابع صفر باشد ولی توابع مستقل خطی باشند

برای یک معادله ناهمگن داریم:

1) هرگاه $y_1(x)$ و $y_2(x),...,y_n(x)$ جواب‌های معادله باشند آن‌گاه هر ترکیب خطی از آن‌ها نیز جواب معادله هستند.

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\mathbf{L}+c_ny_n(x)$$

2) اگر $y_h(x)$ جواب عمومی معادله همگن متناظر و $y_p(x)$ جواب خصوصی معادله غیرهمگن باشد آن‌گاه جواب عمومی معادله غیرهمگن عبارتست از: $y=y_h+y_p$

بنابراین حل یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن ابتدا باید یک جواب عمومی y_h برای قسمت همگن بدست آوریم و سپس یک جواب خصوصی y_p برای قسمت غیرهمگن تعیین کنیم مجموع دو جواب ($y=y_h+y_p$) جواب عمومی معادله غیرهمگن خواهد شد.

از مطالب ذکر شده می توان برای هر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n استفاده نمود.

3-2- معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت

$$a\,y''+b\,y'+c\,y=0$$

a, b, c مقادیر ثابتی هستند.

با فرض اینکه e^{mx} جواب معادله فوق باشد با جایگذاری در معادله داریم:

$$(a\,m^2+b\,m+c)e^{m\,x}=0$$

با توجه به اینکه $e^{mx}\neq 0$:

معادله مشخصه : $m^2+am+b=0$

حالت اول: هردو ریشه حقیقی و متمایز به صورت m_1 و m_2 هستند.

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x} \quad \text{یا} \quad y=c_1\sinh m_1x+c_2\cosh m_2x$$

حالت دوم: هردو ریشه حقیقی و برابر باشند. $m_1=m_2=m$

$$y=c_1e^{m\,x}+c_2xe^{m\,x}$$

حالت سوم: هردو ریشه مختلط و به صورت $m_{1,2}=a\pm bi$ باشد.

$$y=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx) \quad \text{یا} \quad y=c_1e^{(a+bi)x}+c_2e^{(a-bi)x}$$

توجه : این سه حالت را می‌توان برای معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت از مرتبه n نیز تعمیم داد.

3-3- معادله اویلر

معادله دیفرانسیل اویلر مرتبه دوم به صورت زیر است:

$$x^2y''+a\,xy'+b\,y=0$$

با تغییر متغیر $x=e^z$ یا $z=\ln x$ می توان معادله فوق را به یک معادله همگن با ضرایب ثابت تبدیل کرد:

$$y''+(a-1)\,y'+b\,y=0$$

معادله مشخصه : $m^2+(a-1)m+b=0$

حالت اول: هردو ریشه حقیقی و متمایز به صورت m_1 و m_2 هستند.

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$$

حالت دوم: هردو ریشه حقیقی و برابر باشند. $m_1 = m_2 = m$

$$y = c_1 x^m + c_2 x^m \ln x$$

حالت سوم: هردو ریشه مختلط و به صورت $m_{1,2} = a \pm bi$ باشد.

$$y = x^a \left[c_1 \cos(b \ln x) + c_2 \sin(b \ln x) \right]$$

☼ **نکته**: شکل کلی معادله دیفرانسیل اویلر به صورت زیر است:

$$a_n (ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \mathbf{L} + a_1 (ax+b) y' + a_0 y = R(x)$$

با تغییر متغیر $e^z = ax + b$ معادله فوق به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می شود.

3- 4- تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن

برای تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن از روش های زیر استفاده می کنیم:

1) روش ضرایب نامعین

2) روش عملگرهای معکوس

3) روش تغییر پارامترها

3-4-1- روش ضرایب نامعین

از این روش برای معادلات دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت استفاده می شود:

$$a y'' + b y' + c y = g(x)$$

معادله مشخصه معادله همگن متناظر:

$$a m^2 + b m + c = 0$$

در این روش با توجه به عبارت $g(x)$ و ریشه های معادله مشخصه، یک جواب خصوصی با ضرایب نامشخص را حدس می زنیم و با جاگذاری آن در معدله این ضرایب مجهول را تعیین می کنیم:

الف) $g(x) = P_n(x)$

جواب حدس زده شده: $y_p = x^m Q_n(x)$

m تعداد ریشه های صفر در معادله مشخصه

$Q_n(x)$ چند جمله ای درجه n با ضرایب مجهول

ب) $g(x) = e^{bx} P_n(x)$

جواب حدس زده شده: $y_p = x^m e^{bx} Q_n(x)$

m : تعداد ریشه های مساوی b در معادله مشخصه

$Q_n(x)$: چند جمله ای درجه n با ضرایب مجهول

ج) $g(x) = P_n(x) \sin bx + Q_m(x) \cos bx$

جواب حدس زده شده: $y_p = x^m \left[R_r(x) \sin bx + S_r(x) \cos bx \right]$

m : تعداد ریشه های مساوی $\pm ib$ در معادله مشخصه

$S_r(x), R_r(x)$: چند جمله ای درجه r با ضرایب مجهول $(r=\max\{m,n\})$

د) $g(x)=e^{ax}\left[P_n(x)\sin bx+Q_m(x)\cos bx\right]$

جواب حدس زده شده: $y_p=x^m e^{ax}\left[R_r(x)\sin bx+S_r(x)\cos bx\right]$

m : تعداد ریشه های مساوی $a\pm ib$ در معادله مشخصه

$S_r(x), R_r(x)$: چند جمله ای درجه r با ضرایب مجهول $(r=\max\{m,n\})$

☼ **نکته** : اگر $g(x)$ شامل مجموع چند عبارت ذکر شده در فوق باشد برای تک تک عبارت ها مثل فوق جواب خصوصی جداگانه تعیین می کنیم و جواب خصوصی برابر مجموع این جواب های خصوصی خواهد بود.

2-4-3 - روش عملگر معکوس

عملگر مشتق را با D نشان می‌دهیم:

$$y'=\frac{dy}{dx}=Dy \quad , \quad y''=D^2y,\ldots,y^{(n)}=D^ny$$

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\mathbf{L}+a_1y'+a_0y=g(x)$$

$$(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\mathbf{L}+a_1D+a_0)y=g(x)$$

$$L(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\mathbf{L}+a_1D+a_0 \ \Rightarrow\ L(D)y=g(x)$$

معکوس عملگر مشتق، عملگر انتگرال‌گیری است و با نماد $\frac{1}{D}=D^{-1}$ نشان می‌دهیم.

برخی از خواص عملگرها

برای توابع مشتق‌پذیر $f(x)$ و $g(x)$ و عدد ثابت k داریم:

$$D\{f(x)\pm g(x)\}=Df(x)\pm Dg(x) \qquad (1$$

$$D\{k\,f(x)\}=k\,Df(x) \qquad (2$$

$$D^m\left(D^nf(x)\right)=D^{m+n}f(x) \qquad (3$$

$$L(D)e^{kx}=L(k)e^{kx} \qquad (4$$

$$L(D)\left(e^{kx}f(x)\right)=e^{kx}L(D+k)f(x) \qquad (5$$

$$L(D^2)(\sin kx)=L(-k^2)\sin kx \qquad (6$$

$$L(D^2)(\cos kx)=L(-k^2)\cos kx \qquad (7$$

برای تعیین جواب خصوصی معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به روش عملگر معکوس داریم:

$$L(D)y=g(x) \ \Rightarrow\ y_p=\frac{1}{L(D)}g(x)=\frac{1}{a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\mathbf{L}+a_1D+a_0}g(x)$$

حالت‌های خاص:

1) $g(x)=k e^{ax}$

الف) هرگاه $L(a)\neq 0$ و a و k اعدادی ثابت باشند آن‌گاه:

$$y_p(x)=\frac{k e^{ax}}{L(a)}$$

ب) a ریشه مرتبه s ام معادله $L(m)=0$ باشد:

$$L(D)=(D-a)^s P(D) \qquad P(a)\neq 0$$

$$y_p(x)=\frac{x^s}{s!}\frac{k e^{ax}}{P(a)}$$

2) $g(x)=f(x)$ ($f(x)$ چندجمله‌ای از درجه n باشد)

$L(D)$ را بر جهت توان‌های صعودی نوشته را بر $L(D)$ تقسیم می‌کنیم خارج قسمت را تا جمله D^n ادامه می‌دهیم بنابراین:

$$y_p=\frac{1}{L(D)}g(x)=\frac{1}{L(D)}f(x)=(b_0+b_1D+\mathbf{L}+b_nD^n)g(x)$$

$b_0+b_1D+\mathbf{L}+b_nD^n$ بسط تابع $\frac{1}{L(D)}$ است که از جملات بعد از D^n صرفنظر شده است.

3) $g(x)=e^{ax}f(x)$

$$y_p=e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}f(x)$$

4) $g(x)=\sin ax$ یا $g(x)=\cos ax$

الف) $L(-r^2)\neq 0$

جواب خصوصی به ترتیب عبارتست از: $y_p=kL(-a^2)\sin ax$ و $y_p=k(-a^2)\cos ax$

ب) $L(-r^2)=L'(-r^2)=\mathbf{L}=L^{(k-1)}(-r^2)=0$, $L^{(k)}(-r^2)\neq 0$

$$y_p=\frac{x^k}{L^{(k)}(-r^2)}R(x)$$

ج) هرگاه $L(D)$ یک عملگر خطی باشد، آن‌گاه:

$$\frac{1}{L(D)}xf(x)=x\frac{1}{L(D)}f(x)-\frac{L'(D)}{(L(D))^2}f(x)$$

☼ **نکته**: اگر $g(x)$ به صورت $\sin ax$ یا $\cos ax$ باشد می‌توان فرض کرد که $g(x)=e^{iax}$ و مانند حالت e^{ax} جواب را به دست آوریم. اگر جواب مختلط باشد آن را با z_p نمایش می‌دهیم. حال اگر $g(x)$ به صورت $\sin at$ باشد قسمت موهومی z_p جواب است و اگر $g(x)$ برابر $\cos ax$ باشد قسمت حقیقی جواب است.

3-4-3 - روش تغییر پارامترها

از این روش برای معادلات خطی با ضرایب غیرثابت نیز می‌توان استفاده کرد. البته باید جواب عمومی را معادله همگن متناظر را داشته باشیم.

معادله روبرو را در نظر می گیریم: $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$

اگر y_1 و y_2 جواب های مستقل خطی معادله همگن متناظر باشند یک جواب خصوصی معادله ناهمگن از رابطه زیر بدست می آید:

$$y_P = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2$$

$$v_1(x) = \int \frac{y_2 g(x)}{W} dx \quad , \quad v_2(x) = \int \frac{y_1 g(x)}{W} dx$$

3-5 - استفاده از یك جواب مشخص جهت تعیین جواب دیگر

اگر $y_1(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد، در این‌صورت جواب دیگر آن را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x)$$

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

و جواب عمومی برابر خواهد شد با:

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

و اگر معادله ناهمگن باشد به کمک روش تغییر پارامترها می‌توان y_p را یافت

☼ **نکته: برای معادله دیفرانسیل** $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ داریم:

1) اگر $a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) = 0$: $y = e^x$ یک جواب معادله است.

2) اگر $a_0(x) - a_1(x) + a_2(x) = 0$: $y = e^{-x}$ یک جواب معادله است.

3) اگر $a_1(x) + a_2(x) = 0$: $y = x$ یک جواب معادله است.

4) اگر $k^2 a_0(x) + k a_1(x) + a_2(x) = 0$: $y = e^{kx}$ یک جواب معادله است.

5) اگر $a_2(x) = -a$, $a_1(x) = ax + b$: $y = ax + b$ یک جواب معادله است.

با توجه به نکته فوق با تشخیص y_1 و فرض $y_2 = vy_1$ می‌توان جواب عمومی معادله همگن را بدست آورد.

3-6- حالت‌های خاص و نکاتی دیگر

3-6-1- معادلات فاقد متغیر مستقل

این نوع معادلات به صورت $y' = f(y, y')$ هستند

با فرض $y' = p$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \ , \ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

و معادله به صورت $p\frac{dp}{dy} = f(y,p)$ تبدیل می شود که یک معادله مرتبه اول است.

3-6-2- معادلات فاقد تابع

این نوع معادلات به شکل $y' = f(y, y')$ هستند.

با فرض $y' = p$ معادله فوق به یک معادله مرتبه اول به شکل $p' = f(x,p)$ تبدیل می‌شود.

3-6-3- معادلات فاقد تابع و متغیر مستقل

این نوع معادلات به شکل $f(y', y'') = 0$ هستند

با فرض $y' = p$ معادله فوق به معادله $f(p, p') = 0$ تبدیل می‌شود که یک معادله مرتبه اول خواهد بود.

3-7- روش قضیه آبل

هرگاه y_1, y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد، در این‌صورت رونسکین جواب‌ها برابر است با:

$$W(y_1, y_2) = ce^{-\int p(x)dx}$$

که c یک ثابت معین و وابسته به y_1, y_2 است.

3-8- شکل نرمال معادلات خطی مرتبه دوم همگن

برای معادله مرتبه دوم خطی $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ را در نظر می گیریم

با تغییر متغیر $v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$ و فرض $y = w(x)v(x)$ معادله فوق به شکل زیر در می آید:

$$w'' + r(x)w = \frac{g(x)}{v(x)}$$

که در آن: $r(x) = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x)$

فصل 4

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری‌ها

4-1 - نقاط عادی و تکین

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

را در نظر بگیرید. نقطه $x = a$ یک نقطه عادی برای معادله فوق است هرگاه توابع $p(x)$ و $q(x)$ و $g(x)$ در نقطه a تحلیلی باشند در غیر این صورت نقطه تکین یا منفرد معادله است.

نقطه $x = a$ یک نقطه تکین منظم برای معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ است اگر $(x - a)p(x)$ و $(x - a)^2 q(x)$ هردو در نقطه a تحلیلی باشند یا به عبارت دیگر حدود زیر موجود باشند.

$$\lim_{x \to a}(x - a)p(x) \quad , \quad \lim_{x \to a}(x - a)^2 q(x)$$

اگر نقطه a نقطه تکین منظم نباشد یعنی یکی از حدود فوق موجود نباشد گوئیم نقطه a نقطه تکین غیرمنظم است.

☼ **نکته**: اگر $x = a$ ریشه مخرج $p(x)$ یا $q(x)$ یا $g(x)$ باشد این نقطه تکین است.

4-2- جواب‌های سری حول نقطه عادی

فرض کنید x_0 یک نقطه عادی معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد. جواب معادله را به شکل سری $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ درنظر گرفته و با فرض این‌که سری در بازه $|x - x_0| < R$ به‌ازای مقداری از R همگرا باشد، در این‌صورت می‌توان y', y'' را محاسبه و با جایگذاری در معادله و صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف x ، a_nها را محاسبه نمود.

☼ **نکته**: ضریب x^k در بط مکلورن جواب یک معادله دیفرانسیل عبارت است از: $\frac{y^{(k)}(0)}{k!}$

توجه داشته باشید که بسط مکلورن تابع f عبارت است از: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

4-3- جواب های سری حول یك نقطه تكین (روش فروبنیوس)

اگر $x = x_0$ یک نقطه تکین منظم معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد در این‌صورت جواب معادله را به شکل $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}$ درنظر می گیریم و با جایگذاری $y''y'y$ مقدار r با استفاده از معادله زیر بدست می آید:

معادله مشخصه: $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

$$p_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)p(x) \quad , \quad q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x)$$

اگر r_1, r_2 دو جواب معادله مشخصه باشند داریم:

الف) $r_1 \neq r_2$ و $r_1 - r_2$ عددی غیرصحیح:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad , \quad y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

ب) $r_1 = r_2 = r$:

$$y_1 = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad , \quad y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + x^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

ج) $r_1 \neq r_2$ و $r_1 - r_2$ عددی صحیح:

$$y_1 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad , \quad y_2 = a\, y_1 \ln(x - x_0) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

4-4- معادله بسل

4-4-1 - معادله بسل معمولی

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0$$

نقطه $x = 0$ نقطه تکن نظم معادله فوق است.

جواب عمومی معادله بسل به‌صورت زیر است:

اگر p عدد صحیح باشد: $y = AJ_p(x) + BY_p(x)$

اگر p عدد صحیح نباشد: $y = AJ_p(x) + BJ_{-p}(x)$

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

که تابع بسل نوع اول مرتبه p نامیده می‌شود.

اگر p عدد صحیح باشد $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ مستقل خطی نیستند.

$$Y_p(x) = \frac{1}{\sin p\pi} \left[J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)\right]$$

که تابع بسل نوع دوم مرتبه p نامیده می‌شود.

توجه: در حالت‌های خاص $p = 0, 1, \frac{1}{2}$ داریم:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \cdots$$

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}n(n+1)!}=\frac{2}{2}-\frac{x^3}{1!\times 2!\times 2^3}+\frac{x^5}{2!\times 3!\times 2^5}-\mathbf{L}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{px}}\sin x \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{px}}\cos x$$

اگر p عدد صحیح باشد $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ وابسته خطی هستند و داریم:

$$J_{-p}(x)=(-1)^p J_p(x)$$

☼ **نکته**:

الف) صفرهای مثبت توابع $J_p(x)$ و $J_{p+1}(x)$ به‌طور متناوب ظاهر می‌گردند یعنی بین هر دو صفر مثبت متوالی از یکی دقیقاً یک صفر از دیگری قرار دارد.

ب) صفرهای مثبت توابع $Y_p(x)$ و $Y_{p+1}(x)$ به‌طور متناوب ظاهر می‌گردند یعنی بین هر دو صفر مثبت متوالی از یکی دقیقاً یک صفر از دیگری قرار دارد.

4-4-2 - تبدیل برخی از معادلات دیفرانسیل به معادله بسل

برخی از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با تغییر متغیر مناسب به معادله دیفرانسیل بسل تبدیل نود. در زیر چند حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

1) معادلات دیفرانسیل به شکل $x^2y''+xy'+(n^2x^2-m^2)y=0$ را می‌توان با تغییر متغیر $z=nx$ به معادله بسل $z^2y''+xy'+(z^2-m^2)y=0$ تبدیل کرد:

صحیح $m: y(z)=c_1J_m(z)+c_2Y_m(z) \quad \Rightarrow \quad y(x)=c_1J_m(nx)+c_2Y_m(nx)$

غیرصحیح $m: y(z)=c_1J_m(z)+c_2J_{-m}(z) \quad \Rightarrow \quad y(x)=c_1J_m(nx)+c_2J_{-m}(nx)$

2) معادله دیفرانسیل $x^2y''+(2k+1)xy'+(m^2x^{2x}+n^2)y=0$ را که در آن m ، n ، s و k اعداد ثابت هستند می‌توان به معادله دیفرانسیل بسل تبدیل نمود.

$$: y=x^{-k}\left[c_1J_{\frac{a}{s}}\left(\frac{m}{s}x^s\right)+c_2Y_{\frac{a}{s}}\left(\frac{m}{s}x^s\right)\right] \qquad \left(a=\sqrt{k^2-n^2}\right)$$

3) معادله دیفرانسیل $xy''+(2k+1)y'+xy=0$ را می‌توان با تغییر متغیر $z=x^ky$ به معادله دیفرانسیل بسل $x^2z''+xz'+(x^2-k^2)z=0$ تبدیل نمود:

صحیح $m: z(x)=c_1J_k(x)+c_2Y_k(x) \quad \Rightarrow \quad y(x)=x^{-k}\left[c_1J_k(x)+c_2Y_k(x)\right]$

غیرصحیح $m: z(x)=c_1J_k(x)+c_2J_{-k}(x) \quad \Rightarrow \quad y(x)=x^{-k}\left[c_1J_k(x)+c_2J_{-k}(x)\right]$

4) معادله دیفرانسیل $x^2y''+axy'+(b+cx^m)y=0$ را که در آن a ، b ، c و m ثابت (c و m غیرصفر) هستند می‌توان با در نظرگرفتن دو متغیر جدید t و u به شکل $t=gx^b$ و $u=x^at$ به معادله بسل تبدیل نمود.

4-4-3- خواص توابع بسل

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^nJ_n(x)\right]=x^nJ_{n-1}(x)$$

با استفاده از دو رابطه فوق داریم:

$$\int x^n J_{n-1}(x)\,dx = x^n J_n(x) + c$$

$$\int x^{-n} J_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n} J_n(x) + c$$

$$\int J_{n+1}(x)\,dx = \int J_{n-1}(x)\,dx - 2J_n(x)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]$$

$$J_n''(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-2}(x) - 2J_n(x) - J_{n+2}(x)\right]$$

$$xJ_n'(x) = n J_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

$$xJ_n'(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x)$$

برای $Y_n(x)$ هم می‌توان روابطی مشابه روابط فوق نوشت.

☼ **نکته**: برای انتگرال $\int x^a J_b(x)\,dx$ داریم: (با فرض $a+b \neq 0$)

الف) اگر $a+b$ فرد باشد حاصل انتگرال فوق به شکل صریح برحسب توابع بسل خواهد بود.

ب) اگر $a+b$ زوج باشد پس از محاسبه انتگرال فوق جمله $\int J_0(x)\,dx$ باقی خواهد ماند.

4-4-4- معادله بسل اصلاح شده

$$x^2y'' + xy' - (x^2+p^2)y = 0$$

اگر p عدد صحیح یا صفر نباشد: $y = AI_p(x) + BI_{-p}(x)$

اگر p عدد صحیح یا صفر باشد: $y = AI_p(x) + BK_p(x)$

$$I_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}$$

$$K_x(x) = \exp\left(\frac{1}{2}(P+1)\pi i\right)\left[J_p(ix) + iY_p(ix)\right]$$

4-4-5- رفتار توابع بسل وقتی $x \to 0$

$P = 0 : J_0(0) = I_0(0) = 1$

$P > 0 : J_p(0) = I_p(0) = 0$

p مثبت و غیرصحیح $: J_{-p}(0), \pm I_{-p}(0) \to \pm\infty$

p به ازای کلیه مقادیر $- Y_p(0), K_p(0) \to \infty$

بنابراین تنها $J_p(x)$ و $I_p(x)$ جواب‌های فیزیکی قابل قبول در $x=0$ هستند.

4-4- 6- رفتار توابع بسل وقتی $x \to \infty$

هرگاه x مقدار بزرگی باشد داریم:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

$$K_n(x) \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

توابع $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ و $K_n(x)$ با افزایش x میرا می‌شوند.

تابع $I_n(x)$ با افزایش x واگرا می‌شود.

(**توجه**: لزومی به خاطر سپردن چهار رابطه فوق نیست.)

4-4- 7- رابطه بین توابع بسل مرتبه p و p -

هرگاه p یک عدد صحیح باشد،

$$J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$$

$$Y_{-p}(x) = (-1)^p Y_p(x)$$

$$I_{-p}(x) = I_p(x)$$

$$K_{-p}(x) = K_p(x)$$

4-5- معادله لژاندار

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - m(m+1)y = 0$$

m : عدد حقیقی

نقطه $x=0$ یک نقطه عادی معادله است پس دو جواب مستقل خطی به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ دارد با جایگذاری در معادله به رابطه بازگشتی زیر می رسیم:

$$c_{n+2} = \frac{(n-m)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad , \quad n \geq 0$$

حاصل تمام ضرایب زوج برحسب a_0 و تمام ضرایب فرد برحسب a_1 محاسبه می‌شوند.

$$y = a_0\left(1 - \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}x^4 + \cdots\right)$$

$$+a_1\left(x-\frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3+\frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}x^5+\cdots\right)$$

بنابراین جواب عمومی معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

اگر m یک عدد طبیعی باشد جواب معادله لژاندر را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$y=c_1P_m(x)+c_2Q_m(x)$$

اگر n زوج باشد سری $y_1(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است اگر n فرد باشد سری $y_2(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n است.

اگر $c_m=\frac{(2m)!}{2^m(m!)^2}$ انتخاب شود رابطه مربوط به چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n\,k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

☼ **نکته**: رابطه رودریگس

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

☼ **نکته**: چندجمله‌ای‌های لژاندر $P_n(x)$، ضرایب t^n در بسط مک‌لوران تابع $(1-2xt+t^2)^{\frac{-1}{2}}$ هستند :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$P_0(x)=1\quad,\quad P_1(x)=x\quad,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\quad,\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$
$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

☼ **نکته**: $P_n(1)=1\quad,\quad P_n(-1)=(-1)^n$

در حالت کلی $P_n(-x)=(-1)^nP(x)$

☼ **نکته**: چون به ازای nهای فرد $p_n(x)$ تابعی فرد است لذا $P_{2n+1}(0)=0$ و هم‌چنین

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$$

☼ **نکته**: چندجمله‌ای‌ها لژاندر در بازه $[-1,1]$ متعامد هستند:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0\qquad n\neq m$$

$$\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$$

☼ **نکته**: برای چندجمله‌ای‌های لژاندر داریم:

1) $P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$

2) $P_{n+1}'(x) = P_n'(x) + (n+1)P_n(x)$

☼ **نکته**: اگر تابع f در هر زیر بازه از $[-1,1]$ حداکثر در تعداد متناهی نقطه ناپیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی حد چپ و راست و مشتق چپ و راست موجود باشند آن‌گاه در هر نقطه پیوستگی تابع f در بازه $(-1,1)$ می‌توان این تابع را به صورت بسطی بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندار به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x) \quad , \quad c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)dx$$

6-4 - تابع بتا

تابع بتا به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

تابع بتا به ازای $m,n>0$ همگراست.

به سادگی می‌توان نشان داد که: $B(m,n) = B(n,m)$

رابطه تابع بتا با تابع گاما به شکل زیر است:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

7-4 - تابع خطا

تابع خطا به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

تابع خطای مکمل:

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$$

خواص تابع خطا و تابع خطای مکمل

1) $erf(0) = 0 \quad , \quad erf(\infty) = 1$

2) $erfc(0) = 1 \quad , \quad erfc(\infty) = 0$

3) $erf(-x) = -erf(x)$

4) $\frac{d}{dx}erfx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$

فصل 5

تبدیل لاپلاس

5 - 1- تعریف تبدیل لاپلاس

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt$$

که s می‌تواند یک متغیر حقیقی یا مختلط باشد.

توجه داشته باشید که می‌توانیم انتگرال ناسره فوق را به شکل زیر هم بنویسیم:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-st}f(t)\,dt$$

در تعریف فوق فرض شده است که تابع $f(t)$ برای $t \geq 0$ تعریف شده باشد.

تابع $f(t)$ را عکس تبدیل لاپلاس تابع $F(s)$ می‌نامیم و به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$$

قضیه وجود تبدیل لاپلاس: فرض می‌کنیم که تابع $f(t)$ روی بازده $[0,\infty)$ به‌صورت تکه تکه پیوسته باشد و از مرتبه نمایی باشد. در این‌صورت تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به ازای $s > a$ موجود است.

(از مرتبه نمایی بودن تابع $f(t)$ به این مفهوم است که با افزایش t، $|f(t)|$ افزایش می‌یابد ولی این افزایش سریع‌تر از افزایش یک تابع نمایی نیست یعنی به ازای هر $t \geq M$ داشته باشیم: $|f(t)| \leq ce^{at}$ که a، c و M ثابت‌های حقیقی (c و M لزوماً مثبت) هستند.)

☼ **نکته**: تبدیل لاپلاس یک تبدیل یک به یک است.

☼ **نکته**: هرگاه دو تابع دارای تبدیل لاپلاس یکسان باشند آن دو تابع یکسان هستند.

☼ **نکته**: تبدیل لاپلاس و عکس تبدیل لاپلاس تبدیل‌های خطی هستند.

هرگاه توابع $f_i(t)$، $i=1,2,\ldots,n$ دارای تبدیلات لاپلاس $F_i(s)$ و c_iها اعداد ثابتی باشند، داریم:

$$L\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\right\}=\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s)$$

$$L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s)\right\}=\sum_{i=1}^{n} c_i L^{-1}\{F_i(s)\}$$

تبدیل لاپلاس برخی از توابع مهم در جدول زیر ارائه شده است.

تابع $f(t)$	تبدیل لاپلاس $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$ $(s>0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $(s>a)$
t^n $(n$ عدد صحیح و مثبت$)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s>0)$
t^m $(m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$ $(s>0)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $(s>0)$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s>0)$
$\sin hat$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $(s>\lvert a\rvert)$
$\cos hat$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $(s>\lvert a\rvert)$

5 - 2- خواص تبدیل لاپلاس

5 - 2 - 1- قضیه اول انتقال

هرگاه a یک عدد حقیقی دلخواه و $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$$

یا

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$$

5 - 2 - 2- قضیه دوم انتقال

هرگاه a یک عدد حقیقی دلخواه، $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و $u(t)$ یک تابع پله‌ای واحد باشد، داریم:

$$L\{u(t-a)f(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=u(t-a)f(t-a)$$

5 - 2 - 3- تبدیل لاپلاس حاصلضرب تابع $f(t)$ در t^n

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

یا

$$L^{-1}\{F^n(s)\}=(-1)^n t^n f(t)$$

$F^{n}(s)$ مشتق مرتبه n ام تابع $F(s)$ نسبت به s است.

5 - 2 - 4- خاصیت تغییر مقیاس

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ و a یک عدد ثابت باشد داریم:

$$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$L^{-1}\{f(as)\}=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

5 - 2 - 5- تبدیل لاپلاس مشتقات یك تابع

هرگاه تابع $f(t)$ و مشتقات آن تا مرتبه $(n-1)$ ام در بازه $[0,\infty)$ پیوسته و $f^{(n)}(t)$ در این بازه تکه‌تکه پیوسته باشد داریم:

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^{n}F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

در رابطه فوق $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ است.

$n=1 \Rightarrow L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$

$n=2 \Rightarrow L\{f''(t)\}=s^{2}F(s)-sf(0)-f'(0)$

$n=3 \Rightarrow L\left\{f^{(3)}(t)\right\}=s^{3}F(s)-s^{2}f(0)-sf'(0)-f''(0)$

5 - 2 - 6- تبدیل لاپلاس انتگرال یك تابع

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L\left\{\int_{0}^{t}f(u)\,du\right\}=\frac{F(s)}{s}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_{0}^{t}f(u)\,du$$

☼ **نکته**: در حالت کلی هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{(s+a)^{n}}\right\}=e^{-at}\int_{0}^{t}\int_{0}^{t}\cdots\int_{0}^{t}e^{au}f(u)(du)^{n}$$

در حالت خاص $a=0$:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^{n}}\right\}=\int_{0}^{t}\int_{0}^{t}\cdots\int_{0}^{t}f(u)(du)^{n}=\int_{0}^{t}\frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}f(u)\,du$$

و در حالت خاص $n=1$:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_{0}^{t}f(u)\,du$$

5 - 2 - 7- قضیه مقدار اولیه تابع

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to \infty} sF(s)$$

در رابطه فوق فرض شده است $\lim_{s\to \infty} sF(s)$ موجود باشد.

☼ **نکته**: هرگاه تابع $f(t)$ شامل تابع دیراک و یا مشتقات آن باشد $\lim_{s\to \infty} sF(s)$ موجود نبوده و نمی‌توان از قضیه مقدار اولیه استفاده نمود.

☼ **نکته**:

الف) اگر دو تابع $F_1(t)$ و $F_2(t)$ وقتی $t \to 0$ هم‌ارز باشند توابع $F_1(s)$ و $F_2(s)$ هم وقتی $s \to \infty$، هم‌ارز خواهند بود.

ب) اگر دو تابع $F_1(t)$ و $F_2(t)$ وقتی $t \to \infty$ هم‌ارز باشند توابع $F_1(s)$ و $F_2(s)$ هم وقتی $s \to 0$ هم‌ارز خواهند بود.

5 - 2 - 8- تبدیل لاپلاس نسبت تابع $f(t)$ به $t+a$

هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ بوده و $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t+a}$ موجود باشد داریم:

$$L\left\{\frac{F(t)}{t+a}\right\} = e^{as}\int_s^{\infty} e^{-au} F(u)\,du$$

$a > 0$ است.

در حالت خاص $a = 0$ داریم:

$$L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\,du$$

یا

$$L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)\,du\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

☼ **نکته**: هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) + \delta(t) f(0)$$

5 - 3- قضیه پیچش (کانولوشن)

هرگاه $F(s)$ و $G(s)$ به ترتیب تبدیل لاپلاس دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ باشند داریم:

$$L\{f * g\} = F(s)G(s)$$

که در آن:

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

$f * g$ را کانولوشن دو تابع f و g می‌نامیم.

t یک متغیر مجازی است که پس از انجام انتگرال‌گیری حذف می‌گردد.

خواص کانولوشن:

الف) خاصیت جابه‌جایی:

$$f * g = f * g$$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

ج) خاصیت شرکت‌پذیری:

$$f * (g+h) = f * g + f * h$$

د)

$$f * 0 = 0 * f = 0$$

هـ) در حالت کلی داریم:

$$f * 1 \neq f$$

و) با توجه به تعریف کانولوشن دو تابع داریم:

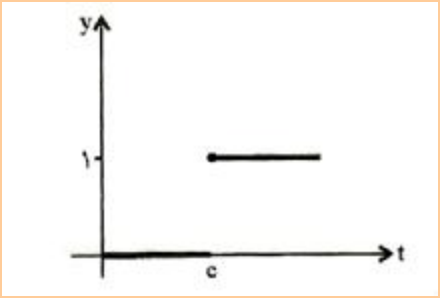
$$1 * f = \int_0^t f(\tau)d\tau \quad \text{یا} \quad L[1 * f] = \frac{L\{f(t)\}}{s}$$

5 - 4- تابع پله‌ای واحد

تابع پله‌ای واحد یا هوی ساید (Heaviside) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u_c(t) \quad \text{یا} \quad u(t-c) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

نمودار تابع پله‌ای واحد به شکل زیر است:



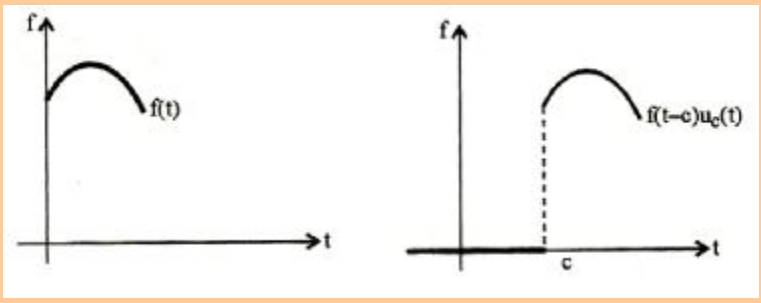
هرگاه تابع $f(t-c)$ در $u_c(t)$ ضرب شود. نتیجه‌اش این خواهد بود که تابع $f(t)$ به میزان c در امتداد محور tها منتقل شده و مقدار آن در $t<c$ صفر می‌باشد.

توجه داشته باشید که هرگاه تابع $f(t)$ به شکل

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) & 0<t<a_1 \\ f_2(t) & a_1<t<a_2 \\ f_3(t) & t>a_2 \end{cases}$$

تعریف شود می‌توان آن را به شکل یک تابع پله‌ای واحد نوشت:

$$f(t)=f_1(t)+[f_2(t)-f_1(t)]u_{a_1}(t)+[f_3(t)-f_2(t)]u_{a_2}(t)$$



تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد:

$$L\{u_c(t)\}=\frac{e^{-cs}}{s} \qquad (s>0)$$

در حالت کلی هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ باشد داریم:

$$L\{u_c(t)f(t-c)\}=e^{-cs}L\{f(t)\}=e^{-cs}F(s) \quad (s>a)$$

یا

$$L^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}=u_c(t)f(t-c)$$

c یک ثابت مثبت است.

5 - 5- تبدیل لاپلاس یك تابع متناوب

هرگاه تابع $f(t)$ در بازه $[0,\infty)$ به‌صورت تکه تکه پیوسته بوده و دارای دوره تناوب T باشد داریم:

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^t e^{-st}f(t)\,dt$$

5 - 6- تابع دلتاك ديراك

تابع $g_t(t)$ را که برای هر $t>0$ در بازه $[0,\infty)$ تعریف شده است در نظر می‌گیریم:

$$g_t(t)=\begin{cases}\frac{1}{t} & 0<t<t\\ 0 & t>t \quad \text{یا} \quad t<0\end{cases}$$

نمودار تابع فوق به ازای $t>0$ به‌صورت زیر است:

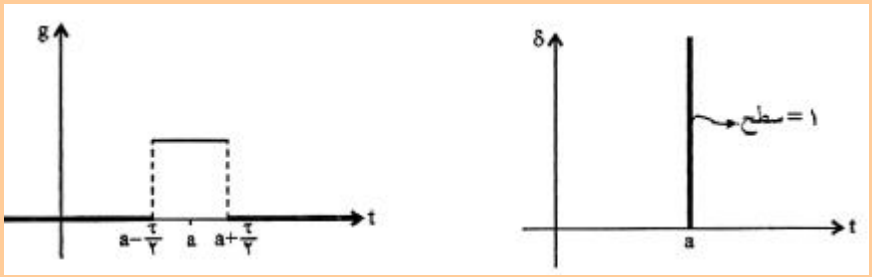
با توجه به تعریف تابع $g_t(t)$ و نمودار فوق مشخص است که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(t)\,dt=1$$

تابع دلتای دیراک یا تابع ضربه واحد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(t)=\lim_{t\to 0} g_t(t)$$

نمودار تابع دلتای دیراک به‌صورت زیر است:



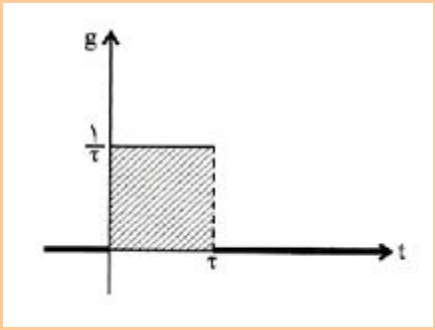
اگر تابع g را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$g_t(t,a)=\begin{cases}\frac{1}{t} & |t-a|<\frac{t}{2}\\ 0 & |t-a|>\frac{t}{2}\end{cases}$$

داریم:

$$\delta(t-a)=\lim_{t\to 0} g_t(t,a)$$

نمودارهای $g_t(t,a)$ و $\delta(t-a)$ در زیر نشان داده شده است.



در ریاضی، تابع دیراک را به شکل زیر در نظر می‌گیرند:

$$\delta(t)=\begin{cases}+\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases} \qquad \delta(t-a)=\begin{cases}+\infty & t=a\\ 0 & t\neq a\end{cases}$$

خواص تابع دلتای دیراک

تبدیل لاپلاس تابع دیراک عبارت است از:

$$L\{d(t)\}=1$$

$$L\{d(t-a)\}=e^{-as}$$

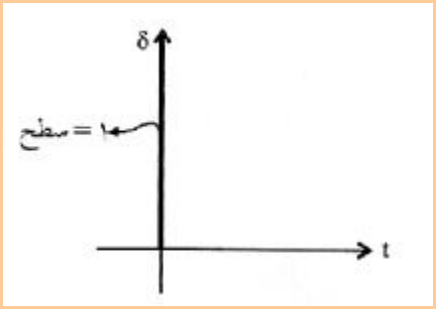
داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(t-a)\,dt=1$$

خاصیت صافی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)d(t-a)\,dt=f(a)$$

$$d[g(t)]=\frac{1}{|g'(a)|}d(t-a)\quad,\quad (g'(a)\neq 0)$$



در حالت خاص $g(t)=at$ داریم:

$$d(at)=\frac{1}{|a|}d(t-a)$$

$$f(t)d(t-a)=f(a)d(t-a)$$

هرگاه $u(t-a)$ یک تابع پله‌ای باشد داریم:

$$\frac{du}{dt}=d(t-a)$$

$$\int_{-\infty}^{a} d(t)\,dt=\begin{cases}0 & a<0\\ 1 & a>0\end{cases}=u(a)$$

فصل 6

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول

6 - 1- مقدمه

دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

هرگاه در دستگاه معادلات فوق f_1 تا f_n توابعی خطی از متغیرهای x_1 تا x_n باشند دستگاه را خطی و در غیر این‌صورت غیرخطی می‌نامیم. شکل کلی یک دستگاه معادلات خطی عبارت است از:

$$\begin{cases} x_1' = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

هرگاه در دستگاه معادلات خطی فوق توابع $g_1(t)$ تا $g_n(t)$ در بازه I به ازای کلیه مقادیر t صفر باشند دستگاه معادلات را همگن و در غیر این‌صورت غیرهمگن می‌نامیم.

شرط وجود جواب: هرگاه توابع $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ و $g_1, g_2, \ldots, g_n$ در بازه I پیوسته باشد دستگاه معادلات خطی فوق دارای جواب یکتایی به شکل $x_1 = f_1(t)$، $x_2 = f_2(t)$، ...، $x_n = f_n(t)$ است که شرط اولیه $x_1(t_0) = x_1^0$، $x_2(t_0) = x_2^0$، ... و $x_n(t_0) = x_n^0$ را ارضا می‌کند و جواب در کل بازه I موجود و x_1^0 و $x_2^0, \ldots, x_n^0$ اعداد مفروض و دلخواهی هستند.

هرگاه در دستگاه معادلات فوق، $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ اعداد ثابتی باشند دستگاه معادلات را دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت می‌نامیم.

6 - 2- روش حذفی

در این روش با انجام عملیات جبری کلیه مجهولات و مشتقات آن‌ها را به جز یکی حذف کرده و با حل معادله حاصل آن مجهول را تعیین می‌کنیم و با استفاده از سایر معادلات مجهولات دیگر هم به‌دست می‌آیند.

برای آشنایی بهتر با این روش، حل دستگاه دو معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) & (2) \end{cases}$$

در دستگاه فوق، a ، b ، c و d ضرایب ثابت و $f(t)$ و $g(t)$ توابع مفروض و $x(t)$ و $y(t)$ مجهولات هستند.

با استفاده از معادله (1) داریم:

$$x' = ax + by + f(t) \quad , \quad y = \frac{1}{b}[x' - ax - f(t)] \qquad (3)$$

با جاگذاری y' از معادله (2) در معادلات فوق داریم:

$$x'' = ax' + b\left[cx + d\cdot\frac{1}{b}[x' - ax - f(t)] + g(t)\right] + f'(t)$$

با ساده کردن معادله فوق:

$$Ax'' + Bx' + Cx + r(t) = 0$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت است.

از حل معادله حاصله می‌توان $x(t)$ را تعیین نموده و با جاگذاری آن در معادله (3)، $y(t)$ را هم به‌دست آورد.

6 - 3- تبدیل لاپلاس

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با n معادله را در نظر می‌گیریم که توابع $x_n(t),...,x_2(t),x_1(t)$ جواب‌های این دستگاه می‌باشند برای حل این دستگاه از کلیه معادلات، تبدیل لاپلاس می‌گیریم و با این کار به دستگاه n معادله جبری می‌رسیم که مجهولات آن $X_n(s),...,X_2(s),X_1(s)$ هستند. دستگاه جبری حاصل را حل نموده و $X_n(s),...,X_2(s),X_1(s)$ را به‌دست می‌آوریم و با تعیین عکس تبدیل لاپلاس آن‌ها، جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل را تعیین می‌کنیم.

برای آشنایی بهتر با این روش، حل دستگاه دو معادله دیفرانسیل را تعیین می‌کنیم.

برای آشنایی بهتر با این روش، حل دستگاه دو معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + f(t) & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + g(t) & (2) \end{cases}$$

شرایط اولیه: $x(0) = x_0 \quad , \quad y(0) = y_0$

از طرفین دو معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = aX(s) + bY(s) + F(s) \\ sY(s) - y_0 = cX(s) + dY(s) + G(s) \end{cases}$$

از حل دستگاه جبری فوق $X(s)$ و $Y(s)$ به‌دست آمده و با تعیین عکس تبدیل لاپلاس آن‌ها می‌توان $x(t)$ و $y(t)$ را تعیین نمود.

6 - 4- روش اویلر برای حل دستگاه معادلات مرتبه اول خطی همگن با ضرایب ثابت

دستگاه معادلات همگن با ضرایب ثابت $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ را در نظر می‌گیریم برای حل این دستگاه فرض می‌کنیم دستگاه همواره دارای جوابی به شکل $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ است و با جاگذاری آن در دستگاه معادلات به معادله زیر می‌رسیم:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

معادله فوق معادله مشخصه ماتریس A نامیده می‌شود و مقادیر حاصله برای λها مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{K}$های متناظر با آن‌ها هم بردارهای ویژه متناظر می‌باشند.

هرگاه λ_1، ... و λ_n مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{K}_1$، ... و $\mathbf{K}_n$ بردارهای ویژه متناظر با آن‌ها باشند جواب عمومی دستگاه معادلات به شکل زیر می‌باشد:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t} + \mathbf{L} + c_n\mathbf{K}_ne^{\lambda_n t}$$

بنابراین در این روش مراحل زیر را داریم:

الف) ابتدا دستگاه معادلات را به شکل ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$$

ب) با استفاده از معادله $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ را تعیین می‌کنیم $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

ج) بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه حاصل شده را به‌دست می‌آوریم $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, ..., \mathbf{K}_n)$

د) جواب عمومی دستگاه به شکل $\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t} + \mathbf{L} + c_n\mathbf{K}_ne^{\lambda_n t}$ است.

☼ **نکته**: اگر کلیه مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ ساده باشند، n بردار ویژه $\mathbf{A}$ هر کدام متناظر با یک مقدار ویژه، مستقل خطی هستند.

اگر یکی از مقادیر ویژه ساده نبوده و دارای چندگانگی m باشد دو حالت رخ می‌دهد:

الف) m بردار ویژه مستقل خطی متناظر با این مقادیر ویژه موجود است.

ب) تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با این مقادیر ویژه کم‌تر از m است.

توجه: هرگاه ماتریس A دارای ریشه مضاعف باشد به طریقه زیر عمل می‌کنیم:

جواب اولی یعنی $x_1(t)$ را مانند قبل به‌دست می‌آوریم و $x_2(t)$ را به شکل $x_2(t) = \mathbf{K}te^{\lambda t} + ze^{\lambda t}$ در نظر می‌گیریم که z بردار ویژه تعمیم یافته متناظر با مقدار ویژه λ نامیده می‌شود.

توجه: هرگاه $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ مقادیر ویژه مختلط و $\lambda_3, ..., \lambda_n$ حقیقی و متمایز باشند داریم:

$$\mathbf{X} = c_1u(t) + c_2v(t) + c_3\mathbf{K}_3e^{\lambda_3 t} + \mathbf{L} + c_n\mathbf{K}_ne^{\lambda_n t}$$

که در این معادله:

$$v(t) = e^{at}[a\sin bt + b\cos bt]$$
$$u(t) = e^{at}[a\cos bt - b\sin bt]$$

6 - 5- روش عملگرها

در این روش ابتدا معادلات دیفرانسیل را به شکل عملگری زیر تبدیل می‌کنیم:

$$f_1(D)x_1 + g_1(D)x_2 + \mathbf{K} = h_1(t)$$
$$f_2(D)x_1 + g_2(D)x_2 + \mathbf{K} = h_2(t)$$
$$\mathbf{M}$$
$$f_n(D)x_1 + g_n(D)x_2 + \mathbf{K} = h_n(t)$$

D : عملگر مشتق‌گیری

سپس $x_1, x_2, ..., x_n$ را با استفاده از روش‌های مربوط به حل دستگاه جبری و تعیین جواب عمومی و خصوصی با روش عملگرهای معکوس به‌دست می‌آوریم.

6 - 6- دستگاه معادلات ناهمگن

هرگاه X_p یک جواب دستگاه معادلات ناهمگن $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}(t)$ در بازه I و $\mathbf{X}_g$ جواب عمومی دستگاه معادلات همگن متناظر آن یعنی $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ باشد جواب عمومی دستگاه ناهمگن به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_g + \mathbf{X}_p$$

فصل 7

فرمولاسیون و مدل‌سازی

7-1- مقدمه

فرمولاسیون متمرکز : کمیت مورد اندازه‌گیری در جسم، تنها تابع زمان است و تابعیت مکانی ندارد یعنی مقدار آن از یک نقطه به نقطه دیگر یکسان در نظر گرفته می‌شود.

فرمولاسیون دیفرانسیلی: اگر کمیت مورد اندازه‌گیری تابعیت مکانی هم داشته باشد مجبوریم از فرمولاسیون دیفرانسیلی استفاده کنیم و با انتخاب یک جزء دیفرانسیلی از جسم قوانین بقا را بر روی آن اعمال کنیم.

7-2- یادآوری

7-2-1- گرادیان، دیورژانس و کرل

گرادیان میدان اسکالر $w = f(x,y,z)$:

$$\text{grad}f = \tilde{N}f = \mathbf{i}\frac{\P f}{\P x} + \mathbf{j}\frac{\P f}{\P y} + \mathbf{k}\frac{\P f}{\P z} \qquad (1)$$

دیورژانس میدان برداری $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$:

$$\text{div}\mathbf{A} = \tilde{N}.\mathbf{A} = \frac{\P A_x}{\P x} + \frac{\P A_y}{dy} + \frac{\P A_z}{\P z} \qquad (2)$$

توجه: مفهوم دیورژانس مقدار خالص خروجی از واحد حجم است.

کرل میدان برداری $\mathbf{A}$:

$$\text{curl}\mathbf{A} = \tilde{N}\acute{}\ \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\P}{\P x} & \frac{\P}{\P y} & \frac{\P}{\P z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

7-2-2- روابط بین دستگاه‌های مختصات مختلف

الف) روابط بین مختصات کارتزین (x,y,z) و مختصات استوانه‌ای (r,q,z) :

$$x = r\cos q \ , \ y = r\sin q \ , \ z = z \qquad (3)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{4}$$

ب) روابط بین مختصات کارتزین (x,y,z) و مختصات کروی (r,θ,ϕ):

$$x=r\sin\theta\cos\phi\ ,\ y=r\sin\theta\sin\phi\ ,\ z=r\cos\theta \tag{5}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\ ,\ \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{6}$$

7-2-3- المان سطح دیفرانسیلی (dA)

1) مختصات استوانه‌ای

جهت r: $dA=r\,d\theta\,dz$

جهت θ: $dA=dr\,dz$

جهت z: $dA=r\,dr\,d\theta$

2) مختصات کروی

جهت r: $dA=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$

جهت θ: $dA=r\sin\theta\,dr\,d\phi$

جهت ϕ: $dA=r\,dr\,d\theta$

7-2-4- المان حجم دیفرانسیلی (dV)

1) مختصات استوانه‌ای $dV=r\,dr\,d\theta\,dz$

2) مختصات کروی $dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

7-2-5- عملگر لاپلاسین ∇^2

عملگر لاپلاسین در دستگاه‌های مختصات مختلف به شکل زیر بیان می‌شود:

الف) مختصات کارتزین

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7}$$

ب) مختصات استوانه‌ای

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8}$$

ج) مختصات کروی

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{9}$$

☼ **نکته**: لاپلاسین یک کمیت در حالت کلی:

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^m\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\mathbf{L} \tag{10}$$

$m=0$: مختصات کارتزین

$m=1$: مختصات استوانه‌ای

$m=2$: مختصات کروی

7-2-6- مشتق مادی یا کامل

مشتق مادی یا مشتق کامل یک کمیت اسکالر:

$$\frac{Df}{Dt}=\frac{\P f}{\P t}+\mathbf{U}.\tilde{N}f \qquad (11)$$

الف) مختصات کارتزین

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\P}{\P t}+u_x\frac{\P}{\P x}+u_y\frac{\P}{\P y}+u_z\frac{\P}{\P z} \qquad (12)$$

ب) مختصات استوانه‌ای

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\P}{\P t}+u_r\frac{\P}{\P r}+\frac{u_q}{r}\frac{\P}{\P q}+u_z\frac{\P}{\P z} \qquad (13)$$

ج) مختصات کروی

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\P}{\P t}+u_r\frac{\P}{\P r}+\frac{u_q}{r}\frac{\P}{\P q}+\frac{u_f}{r\sin q}\frac{\P}{\P f} \qquad (14)$$

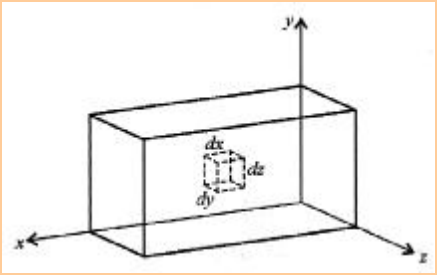
7-3- قوانین بقا

قوانین بقای اصلی عبارتند از بقای جرم، بقای انرژی، بقای مومنتم.

با استفاده از سه قانون اصلی فوق می‌توان معادلات دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم را به‌دست آورد که با حل این معادلات، تغییرات متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل مشخص می‌گردد.

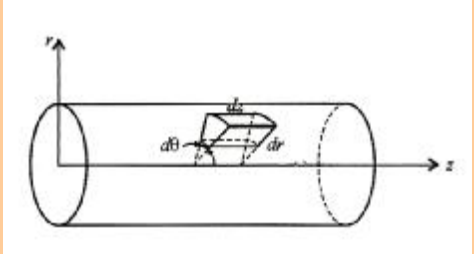
در تجزیه و تحلیل دیفرانسیلی سیستم مورد مطالعه یک المان حجم است. این المان حجم همانند حجم کنترل دارای ورودی و خروجی است. شکل و ابعاد المان حجم به مختصات انتخاب شده و تابعیت متغیرهای مستقل مکانی بستگی دارد.

در این روش باید مشخص گردد که کمیت مورد نظر تابع چه متغیرهای مستقلی است و کدام یک از ابعاد مکانی سیستم نسبت به بقیه دارای اهمیت بیش‌تری است.



$f=f(x,y,z)$

ابعاد المان : dx, dy, dz

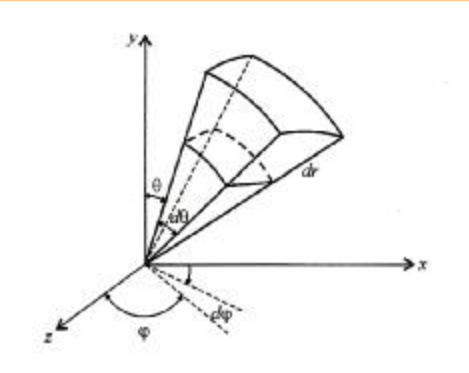


مختصات استوانه‌ای

$f=f(r,z,q)$

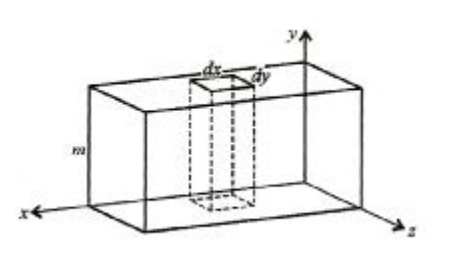
ابعاد المان : $dr, r\,dq, dz$

مختصات کروی



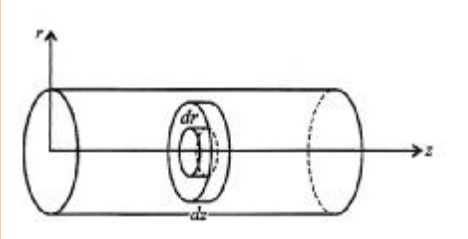
$f = f(r, q, j)$

ابعاد المان : $dr, drq, r\sin qdj$



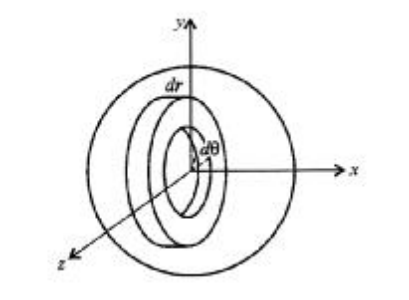
$f = f(z, y)$

ابعاد المان : dx, dy, m



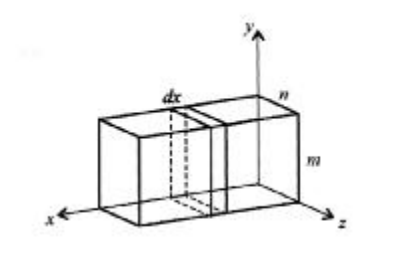
$f = f(r, z)$

ابعاد المان : $dr, 2p, dz$



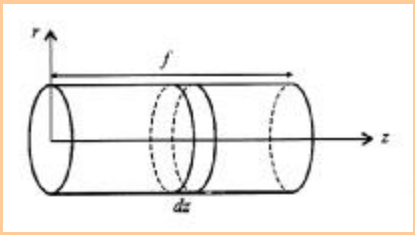
$f = f(r, q)$

ابعاد المان : $dx, r\,dq, 2p$



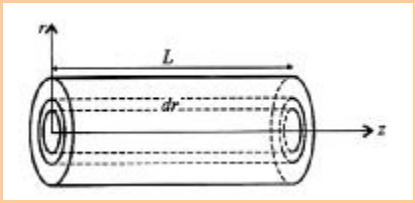
$f = f(x)$

ابعاد المان : dx, m, n



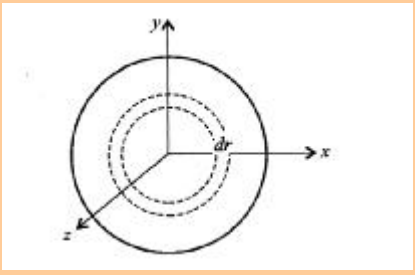
$f = f(z)$

ابعاد المان : $R, 2p, dz$



$f = f(r)$

ابعاد المان : $dr, 2p, L$



$f = f(r)$

ابعاد المان : $dr, p, 2p$

7-1-3- قانون بقای جرم

تجمع = مصرف – تولید + خروجی - ورودی

$$\sum \dot{m}_{in} - \sum \dot{m}_{out} \pm R = \frac{dm}{dt} \qquad (15)$$

$\dot{m}_{in}$: دبی جرمی ورودی

$\dot{m}_{out}$: دبی جرمی خروجی

R : تولید یا مصرف به واسطه انجام واکنش شیمیایی

+: تولید -: مصرف

هرگاه فرایند حالت پایا باشد: $\frac{dm}{dt} = 0$

ورود و خروج جرم می‌تواند ناشی از دو عامل باشد:

1) حرکت توده سیال یا جابه‌جایی

2) نفوذ مولکولی

حالت 1 مربوط به زمانی است که انتقال جرم از طریق اختلاط انجام می‌شود که در این‌صورت نفوذ مولکولی قابل صرف‌نظر کردن خواهد بود.

برای تعیین شار جابه‌جایی از معادله زیر استفاده می‌کنیم:

شار جابه‌جایی = $C_A V_y^*$ (16)

V_y^* سرعت متوسط مولی است.

حالت 2 مربوط به زمانی است که انتقال جرم ناشی از اختلاط غلظت و به شکل نفوذ مولکولی باشد که در این‌صورت از قانون اول فیک که به شکل زیر بیان می‌شود استفاده می‌کنیم:

$$J_A = -CD_{AB}\tilde{N}x_A \qquad (17)$$

$C = cte \Rightarrow J_A = - D_{AB} \nabla C_A$

C : غلظت کل x_A : کسر مولی

D_{AB} : ضریب نفوذ A در B J_A : شار مولی

7-3-2- قانون بقای انرژی

تجمع = مصرف – تولید + خروجی - ورودی

$$\sum \dot{q}_{in} - \sum \dot{q}_{out} \pm \dot{Q} = \frac{dE}{dt} \qquad (18)$$

$\dot{q}_{in}$: شدت جریان انرژی ورودی بر واحد زمان

$\dot{q}_{out}$: شدت جریان انرژی خروجی بر واحد زمان

$\dot{Q}$: تولید یا مصرف به‌واسطه انجام واکنش‌های شیمیایی و هسته‌ای

+ : تولید - : مصرف

$\frac{dE}{dt}$ تغییرات محتوای انرژی کل یا آنتالپی سیستم را نسبت به زمان نشان می‌دهد.

هرگاه فرایند حالت پایا باشد: $\frac{dE}{dt} = 0$

ورود و خروج انرژی می‌تواند ناشی از دو عامل باشد:

1) انتقال توسط توده سیال یا جابه‌جایی 2) نفوذ گرمایی (هدایت)

در حالت 1 از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$q = \rho C_p u A (T - T_{ref}) \qquad (19)$$

که T_{ref} دمای مرجع است و در محاسبات نقشی ندارد.

در حالت 2 از قانون فوریه استفاده می‌کنیم:

$$q = - kA\nabla T \qquad (20)$$

7-3-3- قانون بقای مومنتم

تجمع = مجموع نیروهای مؤثر بر سیستم + خروجی - ورودی

$$\sum \dot{m}_{in} \mathbf{U} - \sum \dot{m}_{out} \mathbf{U} + \sum \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{U})}{dt} \qquad (21)$$

$\mathbf{U}$: سرعت

$\sum \mathbf{F}$: مجموع نیروهای مؤثر وارد بر سیستم است.

درحالت پایا: $\frac{d(m\mathbf{U})}{dt} = 0$

ورود و خروج مومنتم می‌تواند ناشی از دو عمل باشد:

1) جابه‌جایی 2) انتقال مولکولی

در حالت 1 از معادله روبرو استفاده می‌کنیم: شار جابه‌جایی مومنتم $= (\rho V_x) V_y$

در حالت 2 از قانون لزجت نیوتن استفاده می‌کنیم:

$$\tau = - \mu \nabla \mathbf{U} \qquad (22)$$

7-4- قوانین انتقال

7-4-1- معادله پیوستگی کلی

معادله پیوستگی کلی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{N}\times(r\,\mathbf{U}) = -\frac{\P r}{\P t} \qquad (23)$$

یا

$$\frac{\P(r\,u_x)}{\P x}+\frac{\P(r\,u_y)}{\P y}+\frac{\P(r\,u_z)}{\P z} = -\frac{\P r}{\P t} \qquad (24)$$

u_x، u_y و u_z مؤلفه‌های بردار سرعت $\mathbf{U}$ هستند.

حالت پایا: $\frac{\P r}{\P t}=0$

$$\tilde{N}\times(r\,\mathbf{U}) = 0 \qquad (25)$$

جریان تراکم‌ناپذیر $r = cte$:

$$\tilde{N}\times\mathbf{U} = 0 \qquad (26)$$

یا

$$\frac{\P u_x}{\P x}+\frac{\P u_y}{\P y}+\frac{\P u_z}{\P z}=0$$

از معادله فوق هم در جریان پایا و هم در جریان ناپایا می‌توان استفاده کرد.

مختصات استوانه:

$$\frac{1}{r}\frac{\P(r\,ru_r)}{\P r}+\frac{1}{r}\frac{\P(r\,u_q)}{\P q}+\frac{\P(r\,u_z)}{\P z} = -\frac{\P r}{\P t} \qquad (27)$$

مختصات کروی:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\P(r\,r^2u_r)}{\P r}+\frac{1}{r\sin q}\frac{\P(r\,u_q\sin q)}{\P q}+\frac{1}{r\sin q}\frac{\P(r\,u_f)}{\P f} = -\frac{\P r}{\P t} \qquad (28)$$

7-4-2- معادله پیوستگی برای یك ماده

معادله پیوستگی برای ماده A به شکل زیر بیان می‌شود: $(r, D = cte)$

$$\frac{\P C_A}{\P t}+\mathbf{U}\times\tilde{N}C_A = D_{AB}\tilde{N}^2C_A + R_A$$

(29) یا

$$\frac{\P C_A}{\P t}+u_x\frac{\P C_A}{\P x}+u_y\frac{\P C_A}{\P y}+u_z\frac{\P C_A}{\P z} = D_{AB}\left(\frac{\P^2C_A}{\P x^2}+\frac{\P^2C_A}{\P y^2}+\frac{\P^2C_A}{\P z^2}\right)+R_A$$

هرگاه واکنش شیمیایی و حرکت توده‌ای وجود نداشته باشد و انتقال جرم فقط در جهت z صورت بگیرد، داریم:

$$\frac{\P C_A}{\P t} = D\frac{\P^2C_A}{\P z^2} \qquad (30)$$

جملات $\frac{\P C_A}{\P t}$ انتقال جرم در حالت ناپایا، $\mathbf{U}\times\tilde{N}C_A$ انتقال جرم در اثر جابه‌جایی، $D\tilde{N}^2C_A$ انتقال جرم در اثر نفوذ مولکولی و R_A انتقال جرم در اثر واکنش شیمیایی را نشان می‌دهند.

در مختصات استوانه‌ای داریم: $(r, D = cte)$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + u_r \frac{\partial C_A}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial C_A}{\partial z} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right]$$

(31)

هرگاه واکنش شیمیایی و حرکت توده‌ای وجود نداشته باشد و انتقال جرم فقط در جهت r صورت بگیرد، داریم:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) \right] \qquad (32)$$

اگر علاوه بر شرایط ذکر شده حالت پایا نیز داشته باشیم داریم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) = 0$$

در مختصات کروی داریم: $(r, D = cte)$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + u_r \frac{\partial C_A}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial C_A}{\partial \phi} = \qquad (33)$$

$$= D \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial C_A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 C_A}{\partial \phi^2} \right] + R_A$$

هرگاه واکنش شیمیایی و حرکت توده‌ای وجود نداشته باشد و انتقال جرم فقط در جهت r صورت بگیرد، داریم:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) \right] \qquad (34)$$

اگر علاوه بر شرایط ذکر شده حالت پایا نیز داشته باشیم داریم:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_A}{\partial r} \right) = 0 \qquad (35)$$

7 - 4 - 3 - معادله انرژی (انتقال گرما)

معادله انرژی در حالت کلی به شکل زیر بیان می‌شود: $(r, k = cte)$

$$\rho C \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \dot{q}$$

(36) یا

$$\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q}$$

$\dot{q}$ مربوط به تولید انرژی است.

اگر جابه‌جایی و حرکت وجود نداشته باشد، داریم:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \dot{q} \qquad (37)$$

در حالت پایا : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (38)$$

اگر علاوه بر شرایط فوق، انتقال گرما یک بعدی و بدون تولید انرژی باشد داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{dx^2}=0 \qquad (39)$$

که معادله لاپلاس یک‌بعدی در مختصات کارتزین است.

در مختصات استوانه‌ای داریم: $(r, k=cte)$

$$r C\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{u_q}{r}u_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]+q \qquad (40)$$

اگر انتقال گرما یک‌بعدی در جهت r، حالت پایا و بدون تولید انرژی باشد داریم:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0 \qquad (41)$$

در مختصات کروی داریم: $(r, k=cte)$

$$r C\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{u_q}{r}\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{u_f}{r\sin q}\frac{\partial T}{\partial f}\right)=$$

$$k\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin q}\frac{\partial}{\partial q}+\frac{1}{r^2\sin 2q}\frac{\partial^2 T}{\partial f^2}\right]+q \qquad (42)$$

اگر انتقال گرما یک بعدی در جهت r، حالت پایا و بدون تولید انرژی باشد، داریم:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0 \qquad (43)$$

☼ **نکته**: هرگاه کره صلب همگن بوه و انتقال گرما در شرایط پایا صورت گیرد تغییرات درجهت q و f صفر است و فقط تغییرات شعاعی داریم.

☼ **نکته**: هرگاه استوانه صلب همگن باشد تغییرات در جهت q صفر است.

☼ **نکته**: در مورد مختصات استوانه داریم:

الف) اگر شعاع استوانه به اندازه کافی کوچک باشد انتقال گرما را می‌توان یک‌بعدی و در جهت شعاعی در نظر گرفت.

ب) اگر سطح مقطع استوانه عایق باشد انتقال گرما در جهت شعاعی صورت می‌گیرد.

ج) اگر سطح جانبی استوانه عایق بوده و نسبت طول به شعاع استوانه به اندازه کافی بزرگ باشد، انتقال گرما را می‌توان یک‌بعدی و در جهت محوری در نظر گرفت.

د) هرگاه طول استوانه زیاد باشد می‌توانیم از انتقال گرما در جهت طول (z) صرف‌نظر کنیم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0$$

7-4-4- معادله اندازه حرکت

$$r\frac{DU}{Dt}=-\tilde{N}\times t-\tilde{N}P+r g \qquad (44)$$

اگر سیال نیوتنی و r و m مقادیر ثابتی باشد: (معادلات ناویر – استوکس)

$$r\frac{DU}{Dt}=m\tilde{N}^2U-\tilde{N}P+r g \qquad (45)$$

7-4-5- نکات مهم در حل تست‌های مدل‌سازی

☼ **نکته**: در مدل‌سازی سیستم‌های استوانه‌ای در جهت r، در صورت وجود مشتق دوم نسبت به r، باید یکی از عبارت‌های زیر در معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{\partial r},\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

☼ **نکته**: در مدل‌سازی سیستم‌های کروی در جهت r، در صورت وجود مشتق دوم نسبت به r باید یکی از عبارت‌های زیر در معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2r\frac{\partial u}{\partial r},\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r},\ \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$$

☼ **نکته**: در جهت حرکت توده جریان، جمله مربوط به انتقال مولکولی (مشتق دوم) قابل صرف‌نظر است.

☼ **نکته**: در مدل‌سازی‌هایی که منجر به معادله بسل اصلاح شده می‌شود از این مطلب که تابع $K_p(x)$ وقتی $x \to 0$، مقدار نامحدود دارد استفاده می‌کنیم.

☼ **نکته**: در تست‌های مربوط به پره‌ها باید به این نکته دقت کنیم که در پایه پره دما محدود است بنابراین نباید جمله‌ای وجود داشته باشد که سبب نامحدود شدن دمای پایه پره شود.

فصل 8

مقدمه‌ای بر سری‌های فوریه

8-1- تعریف سری فوریه

تابع $y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم که در بازه $[-L,L]$ تعریف شده و دارای دوره تناوب $2L$ باشد. سری فوریه یا بسط فوریه متناظر با این تابع به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (1)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad (2)$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad (3)$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx \quad (4)$$

☼ **نکته**: هرگاه ضرایب سری فوریه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[-L,L]$ به ترتیب a_n، b_n و a'_n، b'_n باشند ضرایب سری فوریه ترکیب خطی از این دو تابع یعنی $c_1f(x)+c_2g(x)$ در این بازه عبارت خواهد بود از:

$$c_1a_n+c_2a'_n\ ,\ c_1b_n+c_2b'_n$$

☼ **نکته**: برای ضرایب سری فوریه داریم:

$$\lim_{n\to\infty}a_n,b_n=0$$

8-2- شرایط دیریکله برای همگرایی سری فوریه

فرض می‌کنیم که:

الف) تابع $f(x)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $2L$ است.

ب) تابع $f(x)$ در بازه $(-L,L)$ تعریف شده است.

ج) توابع $f(x)$ و $f'(x)$ در بازه $(-L,L)$ تکه تکه پیوسته باشند (یعنی در این بازه تعداد گسستگی‌ها و همچنین نقاط ماکزیمم و مینیمم متناهی باشد)

در این‌صورت سری فوریه ذکر شده در هر نقطه پیوستگی x به سمت $f(x)$ و در هر نقطه ناپیوستگی x به سمت $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ همگرا است.

سه شرط ذکر شده شرایط کافی (نه لازم) برای همگرایی سری فوریه تابع $f(x)$ هستند یعنی با برقراری این شرایط، همگرایی تضمین می‌گردد ولی در صورت عدم برقراری شرایط، وضعیت همگرایی مشخص نمی‌شود.

8-3- سری فوریه توابع زوج و فرد

تابع $y=f(x)$ را در بازه $[-L,L]$ در نظر می‌گیریم:

الف) اگر این تابع زوج باشد: $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$

ب) اگر این تابع فرد باشد: $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$

توجه داشته که منحنی نمایش تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است یعنی: $f(-x)=f(x)$ و منحنی نمایش تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است یعنی: $f(-x)=-f(x)$

سری فوریه یک تابع زوج: (سری فوریه نیم دامنه کسینوسی)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \qquad (5)$$

که در آن

$$a_0=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx \ , \ a_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad (6)$$

سری فوریه یک تابع فرد:(سری فوریه نیم دامنه سینوسی)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (7)$$

که در آن

$$b_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad (8)$$

توجه: هرگاه تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ غیرمتناوب باشد تابع متناوب با دوره تناوب $|b-a|\le 2L$ را طوری تعریف می‌کنیم که در بازه مربوطه بر تابع $f(x)$ منطبق باشد.

اگر $f(x)$ در بازه $[0,L]$ تعریف شود در این‌صورت می‌توان تابع متناوب را به‌صورت دلخواه در بازه $[-L,L]$ به گونه‌ای تعریف نمود که تابع نهایی زوج یا فرد شود.

8-4- اتحاد پارسوال

هرگاه a_n و b_n ضرایب سری فوریه تابع $f(x)$ باشند و شرایط دیریکله برای تابع $f(x)$ صادق باشند داریم:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \qquad (9)$$

8-5- مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه

تابع متناوب $f(x)$ را در بازه $[-L,L]$ در نظر می‌گیریم. هرگاه سری فوریه این تابع به شکل

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

باشد با شرط این‌که $f'(x)$ در بازه فوق، تکه تکه پیوسته بوده و $f(L)=f(-L)$ باشد داریم:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}\left(b_n\cos\frac{n\pi}{L}x-a_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (10)$$

$$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(a_n\sin\frac{n\pi}{L}x-b_n\cos\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (11)$$

اگر $a_0=0$، حاصل یک سری فوریه می‌شود در غیر این‌صورت باید سری فوریه x را به‌دست آورده و در عبارت $\frac{a_0}{2}x$ جای‌گذاری کنیم.

6-7- سری فوریه مختلط

با فرض این‌که شرایط دیریکله برقرار باشد از اتحاد اویلر که به شکل $e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ بیان می‌شود و با انجام یکسری محاسبات جبری به رابطه زیر می‌رسیم که شکل مختلط سری فوریه تابع $f(x)$ است:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi}{L}x} \qquad (12)$$

که در آن:

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}e^{-\frac{in\pi}{L}x}f(x)\,dx \qquad (13)$$

رابطه فوق با فرض پیوسته بودن $f(x)$ در x نوشته شده است اگر x یک نقطه گسستگی تابع باشد در معادله (12) به جای $f(x)$ عبارت $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ را قرار می‌دهیم.

فصل 9

مسایل اشتورم لیوویل

9-1- توابع متعامد (اورتوگونال)

دسته توابع غیرصفر و انتگرال‌پذیر $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}$ را در بازه $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. ضرب عددی در این مجموعه به شکل زیر بیان می‌شود:

$$< f_m, f_n >= \int_a^b f_m(x) f_n(x)\, dx \qquad m \neq n \qquad (1)$$

نُرم هر تابع $f_m(x)$ هم به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\|f_m(x)\| = \left[\int_a^b f_m^2(x)\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

مجموعه توابع ذکر شده را متعامد می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$< f_m, f_n >= \int_a^b f_m(x) f_n(x)\, dx = 0 \qquad (3)$$

هرگاه نرم توابع فوق برابر 1 باشد مجموعه را متعامد یکه می‌نامیم و به شکل زیر نمایش می‌دهیم. δ_{mn} را دلتای کرونکر می‌نامیم و داریم:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \qquad (4)$$

در هر مجموعه متعامد یکه هر عضو بر هر عضو دیگر مجموعه عمود بوده و نرمال شده هم می‌باشد. اگر یک دسته توابع متعامد داشته باشیم می‌توان با قرار دادن $\varphi_k(x) = \dfrac{f_k(x)}{\|f_k\|}$ یک دسته توابع متعامد یکه ایجاد نمود.

☼ **نکته**: هر دسته توابع متعامد مستقل خطی هستند.

توجه: هرگاه دسته توابع $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}$ در بازه $[a,b]$ متعامد بوده و تابع $y = f(x)$ در این بازه انتگرال‌پذیر باشد می‌توان $f(x)$ را به شکل ترکیب خطی از $f_m(x)$ها نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \qquad (5)$$

$$c_n = \frac{1}{\|f_n(x)\|^2}\int_b^a f(x)f_n(x)\,dx \qquad (6)$$

9-2- تعامد نسبت به يك تابع وزنی

هرگاه دسته توابع $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}$ متعامد نباشند ولی بتوان تابعی مثل $w(x)$ (تابع وزن) را پیدا کرد به‌طوری که دسته توابع $q_m(x) = \sqrt{w(x)}f_m(x)$ تشکیل یک مجموعه متعامد در بازه $[a,b]$ را دهند یعنی:

$$\int_b^a w(x)f_m(x)f_n(x)\,dx = 0 \qquad m \neq 0 \qquad (7)$$

گوییم دسته توابع ذکر شده در بازه $[a,b]$ با تابع وزنی $w(x)$ متعامد هستند.

☼ **نکته**: هرگاه دسته توابع $\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}$ متعامد باشند به ازای $m \neq n$ داریم:

$$\|f_m(x) + f_n(x)\|^2 = \|f_m(x)\|^2 + \|f_n(x)\|^2 \qquad (8)$$

9-3- تعامد برخی از توابع و بسط يك تابع برحسب آن‌ها

9-3-1- تعامد توابع sin و cos

توابع $\sin\frac{n\pi}{L}x$ و $\cos\frac{n\pi}{L}x$ در بازه $[-L, L]$ تشکیل دسته توابع متعامد را می‌دهند:

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{m\pi}{L}x\,dx = 0 \qquad (9)$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{m\pi}{L}x\,dx = \begin{cases} L & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \qquad (10)$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi}{L}x\cos\frac{m\pi}{L}x\,dx = \begin{cases} L & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \qquad (11)$$

بسط تابع $f(x)$ برحسب توابع sin و cos منجر به سری‌های فوریه می‌گردد که در فصل قبل به آن‌ها اشاره گردید.

9-3-2- تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژاندر در بازه $[-1,1]$ متعامد هستند یعنی:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n) \qquad (12)$$

و

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (13)$$

هرگاه توابع $f(x)$ و $f'(x)$ به‌صورت قطعه قطعه پیوسته باشند $f(x)$ را می‌توان در هر نقطه پیوستگی $f(x)$ واقع در بازه $(-1,1)$ به شکل بسطی برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر به‌صورت زیر بیان کرد:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m \qquad (14)$$

که در آن

$$c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx \qquad (15)$$

9-3-3- تعامد توابع بسل نوع اول

هرگاه λ و m دو ثابت باشند $(\lambda \neq m)$ رابطه زیر برقرار است:

$$\int_{-1}^{1} xJ_n(\lambda x)J_n(mx)\,dx = \frac{1}{\lambda^2 - m^2}\left[mJ_n(\lambda)J_n'(m) - \lambda J_n(m)J_n'(\lambda)\right] \qquad (16)$$

اگر $m = \lambda$ باشد داریم:

$$\int_{-1}^{1} xJ_n^2(\lambda x)\,dx = \frac{1}{2}\left[J_n'^2(\lambda) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\right)J_n^2(\lambda)\right] \qquad (17)$$

با توجه به رابطه اول هرگاه λ و m دو ریشه مختلف و دلخواه معادله:

$$AJ_n(x) + BxJ_n'(x) = 0 \qquad (A, B \text{ ثابت}) \qquad (18)$$

باشند داریم:

$$\int_{0}^{1} xJ_n(\lambda x)J_n(mx)\,dx = 0 \qquad (19)$$

در نتیجه توابع $\sqrt{x}J_n(\lambda x)$ و $\sqrt{x}J_n(mx)$ در بازه $(0,1)$ متعامد هستند و یا توابع $J_n(\lambda x)$ و $J_n(mx)$ نسبت به تابع وزنی x متعامد هستند.

9-4- معادله اشتورم لیوویل

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \qquad a \le x \le b \qquad (20)$$

که در آن $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ توابع حقیقی پیوسته و بازه $[a,b]$ هستند.

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 & a_1^2 + a_2^2 \neq 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 & b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases} \qquad (21)$$

که در آن a_1، a_2، b_1 و b_2 اعداد ثابتی هستند.

هرگاه $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ جواب‌های معادله دیفرانسیل فوق به ازای $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ باشند می‌توان نشان داد که دسته توابع $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ نسبت به تابع وزنی $r(x)$ متعامد هستند یعنی:

$$\int_{a}^{b} r(x)f_m(x)f_n(x)\,dx = 0 \qquad (22)$$

توجه داشته باشید که هرگاه $r(x)$ مقدار ثابتی باشد جواب‌های معادله متعامد هستند و اگر $r(x)$ مقدار ثابتی نباشد جواب‌های معادله نسبت به تابع وزنی $r(x)$ متعامد هستند.

مقادیر از λها را که به ازای آن‌ها معادله اشتورم لیوویل دارای جواب باشد مقادیر ویژه و جواب‌های $f(x)$ متناظر با آن‌ها را توابع ویژه می‌نامیم.

نکاتی در مورد مقادیر ویژه و توابع ویژه

1) هر تابع ویژه متناظر با یک مقدار ویژه است.

2) $n > m : \lambda_n > \lambda_m$ و $\lim_{n\to\infty} \lambda_n \to \infty$

3) کلیه مقادیر ویژه حقیقی هستند.

4) توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه مختلف مستقل خطی هستند.

توجه: معادله دیفرانسیل لژاندر حالت خاصی از معادله اشتورم لیوویل است که در آن داریم:

$$p(x) = 1 - x^2 \quad , \quad q(x) = 0 \quad , \quad \lambda = m(m+1) \quad , \quad r(x) = 1$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که معادلات دیفرانسیل بسل، لاگر، هرمیت و چبیشف نیز حالات خاصی از معادله اشتورم لیوویل هستند.

☼ **نکته**: معادله دیفرانسیل $y'' + \lambda y = 0$ را در نظر می‌گیریم برای تعیین مقادیر ویژه این معادله داریم:

الف) هرگاه شرایط مسئله به یکی از دو شکل زیر باشد مقادیر ویژه از رابطه $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ به‌دست می‌آیند.

$$y'(0) = y'(L) = 0 \quad \text{یا} \quad y(0) = y(L) = 0$$

ب) هرگاه شرایط مسئله به یکی از دو شکل زیر باشد مقادیر ویژه از رابطه $\lambda_n = \left(\frac{2n \pm 1}{2L}\pi\right)^2$ به‌دست می‌آیند.

$$y'(0) = y(L) = 0 \quad \text{یا} \quad y(0) = y'(L) = 0$$

9-5- بسط توابع ویژه

معادله دیفرانسیل اشتورم لیوویل (20) را با مقادیر ویژه λ_n و توابع ویژه f_n در نظر می‌گیریم.

هرگاه تابع $y = f(x)$ تابعی تعریف شده در بازده $[a,b]$ باشد می‌توان آن را به شکل یک سری بر حسب توابع ویژه بیان نمود:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \qquad (23)$$

ضرایب c_n از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$c_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) f_n(x)\, dx}{\int_a^b r(x)[f_n(x)]^2\, dx} \qquad (24)$$